Osaka University Knowledge Archive

Title	南雲氏ノ問題ニ就イテ（II）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 46 p.11-p.22
Issue Date	1935-06-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74081
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

159. 南雲氏ノ問題ニ就イテ（II）

北川 敏男（阪大）

4. $\int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)}\left(\int_0^\eta e^{-\lambda t}f(t)dt\right)d\varphi(\eta)$ （＝J トオク）ノ

分解.

仮定〔I,〕ト積分ノ順序交換トカラ

$$J=\int_0^b e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^b e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)d\eta\right)dt$$

$$+\int_a^0 e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^a e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)d\eta\right)dt$$

$$+\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(x_0+t_i)}\int_0^{t_i}f(t)e^{-\lambda t}dt$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}\quad（トオク）$$

$b>x_0>0$ トシテ分解ニトリカヽル。

1°. $$\mathrm{I}=\int_0^b e^{-\lambda t}f(t)\left(\int_t^b e^{\lambda(x_0+\eta)}g'(\eta)dy\right)dt$$

$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4$$

但シ茲ニ

$$\mathrm{I}_1=\int_{-x}^{-\delta}e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^b e^{\lambda\eta}g'(\eta)d\eta\right)d\tau$$

$$\mathrm{I}_2=\int_{-\delta}^0 e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^b e^{\lambda\eta}g'(\eta)d\eta\right)d\tau$$

$$I_3=\int_0^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\, d\eta\right) d\tau$$

$$I_4=\int_{\delta}^{b-x} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\, d\eta\right) d\tau$$

更ニ，コレラヲ分解スル。

(i) $$I_1=e^{\lambda x_0}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t)\,\frac{e^{\lambda b}[g'(b)]-e^{\lambda t}[g'(t)]}{\lambda}\, dt$$

（〔假定I_1〕ト補助定理２トヲ使フ）

$$=\frac{[g'(b)]\, e^{\lambda(x_0+b)}}{\lambda}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_0^{x_0-\delta} f(t)[g'(t)]\, dt$$

(ii) $$I_2=\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b-\delta_1} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\, d\eta\right) d\tau$$

$$+\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\, d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\, d\eta$$

$$=\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,\frac{[g'(b-\delta_1)]\, e^{\lambda(b-\delta_1)}-[g'(x_0+\tau)]\, e^{\lambda(x_0+\tau)}}{\lambda}\, d\tau$$

$$+f(x_0-0)\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau}\, d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\, d\eta$$

$$+\int_{-\delta}^{0}\left\{f(x_0+\tau)-f(x_0-0)\right\} e^{-\lambda\tau}\, d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\, d\eta$$

$$=\frac{+[g'(b-\delta_1)]e^{\lambda(b-\delta_1)}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} f(x_0+\tau)[g'(x_0+\tau)]\,d\tau$$

$$+f(x_0-0)\frac{-1+e^{\lambda\delta}}{\lambda}\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$+\int_{-\delta}^{0}\{f(x_0+\tau)-f(x_0-0)\}e^{-\lambda\tau}d\tau\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

(iii) $$\mathrm{I}_3=\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\int_{x_0+\tau}^{b-\delta_2} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta\,d\tau$$

$$+\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$=\frac{[g'(b-\delta_2)]e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} f(x_0+\tau)[g'(x_0+\tau)]\,d\tau$$

$$+f(x_0+0)\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau}d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$+\int_{0}^{\delta}\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\}e^{-\lambda\tau}d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$=\frac{[g'(b-\delta_2)]e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_0^{\delta} f(x_0+\tau)\left[g'(x_0+\tau)\right]d\tau$$

$$+f(x_0+0)\,\frac{1-e^{-\lambda\delta}}{\lambda}\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

$$+\int_0^{\delta}\left\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\right\}e^{-\lambda\tau}d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta$$

注意： (ii), (iii) ニ於イテ、假定 I_1, II_1, II_2 ヲ使用シテキル。

尚 $0<\delta<\delta_1$, $0<\delta<\delta_2$ トシテオク。

(iv) $$\mathrm{I}_4=\int_{\delta}^{b-x_0} e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau)\left(\int_{x_0+\tau}^{b} e^{\lambda\eta} g'(\eta)\,d\eta\right)d\tau$$

$$=\frac{\left[g'(b)\,e^{\lambda b}\right]}{\lambda}\int_{\delta}^{b-x_0} f(x_0+\tau)\,e^{-\lambda\tau}d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{\delta}^{b-x_0} f(x_0+\tau)\left[g'(x_0+\tau)\right]d\tau$$

2° $$\mathrm{II}=\int_a^0 e^{-\lambda t} f(t)\left(\int_t^a e^{\lambda(x_0+\eta)} g'(\eta)\,d\eta\right)dt$$

$$=\frac{\left[g'(a)\right]e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda}\int_a^0 e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_a^0 f(t)\left[g'(t)\right]dt$$

5. 偖テ以上ノ分解ノ結果ニ於イテ

1° (i) カラ $$\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_0^{x_0-\delta} f(t)\left[g'(t)\right]dt$$

(ii) カラ $$\frac{\left[g'(b-\delta_1)\right]e^{\lambda(b-\delta_1)}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{-\delta}^{0} f(x_0+\tau)\left[g'(x_0+\tau)\right]d\tau$$

(iii) カラ $$\frac{\left[g'(b-\delta_2)\right]e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda\tau}f(x_0+\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda}\int_{0}^{\delta} f(x_0+\tau)\left[g'(x_0+\tau)\right]d\tau$$

(iv) ノ全部

2° ノ全部

以上ノ各積分値ハ, δ_i, δ ヲ充分小サクトッテオケバ λ ノ函數トシテ

$$R\lambda \geqq 0 \text{ ニテハ } \frac{O(e^{\lambda k})}{\lambda} \qquad (k<b)$$

$$R\lambda \leqq 0 \text{ ニテハ } \frac{O(e^{\lambda l})}{\lambda} \qquad (l>a)$$

ナル如キ k, l ヲ各々ニ對シテ見出シウル。コノ事ハ豫備定理1ヲ適用スレバ明カデアル。

依ッテ $\frac{1}{G(\lambda)}$ ヲカケテ $\mathbb{C}_n$ 上デ積分スレバ $n\to\infty$ ノトキ零トナル。

ソレ故ニ

$$\text{A.}\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(x_0+t_i)}\int_0^{t_i} f(t)e^{-\lambda t}dt}{G(\lambda)}+\frac{[g'(b)]e^{\lambda(x_0+b)}}{\lambda G(\lambda)}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t}f(t)dt$$

(III) $\qquad$ 1°. (i)

$$\text{B.}\quad \frac{1}{G(\lambda)}\int_{-\delta}^{0}\{f(x_0+\tau)-f(x_0-0)\}e^{-\lambda\tau}\int_{b-\delta_1}^{b} e^{\lambda\eta}g'(\eta)d\eta$$

$$\text{C.}\quad \frac{1}{G(\lambda)}\int_{0}^{\delta}\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\}e^{-\lambda\tau}d\tau\int_{b-\delta_2}^{b} e^{\lambda\eta}g'(\eta)d\eta$$

ヲバ、$\mathbb{C}_n$ 上デ積分シテ $n\to\infty$ ノトキ零トナレバ，吾人ノ定理ノ証明ハ完結スル。 以下. §6 デ A, §7 デ B, C ニツイテ之レヲ示サウ。

$$6.\quad \oint_{\mathbb{C}_n}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(x_0+t_i)}\int_0^{t_i} f(t)e^{-\lambda t}dt}{G(\lambda)}+\frac{[g'(b)]e^{\lambda(x_0+b)}}{\lambda G(\lambda)}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t}f(t)dt\right\}d\lambda$$

$$=\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(x_0+t_i)}\int_0^{t_i} f(t)e^{-\lambda t}dt}{G(\lambda)}d\lambda$$

$$+\oint_{\mathbb{C}_n} e^{\lambda x_0}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t}f(t)dt\,d\lambda+\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{[g'(a)]e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda G(\lambda)}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t}f(t)dt\,d\lambda$$

$$-\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{G(\lambda)}\int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t}f(t)dt\,d\lambda$$

$$=\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{G(\lambda)}\int_{x-\delta}^{t_i}f(t)e^{-\lambda t}dt\,d\lambda$$

$$+\oint_{\mathbb{C}_n}\frac{[g'(a)]e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda G(\lambda)}\int_0^{x_0-\delta}e^{-\lambda t}f(t)\,dt\,d\lambda$$

茲ニ，$a<0$ ダカラ $x_0+a<b$ ナルコトニ注意スレバ，豫備定理 3 ニ由リ、第二ノ積分ハ $n\to\infty$ ノトキ零ニナル。

又 $\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}\int_{x_0-\delta}^{t_i}f(t)e^{-\lambda t}dt$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+\delta)}}{\lambda}-\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda x_0}f(t_i)}{\lambda}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{\lambda}\int_{x-\delta}^{t_i}e^{-\lambda t}\left(\int_{x_0-\delta}^{t}f(\tau)d\tau\right)dt$$

ナル故ヲ以ッテ、豫備定理 1, 3 カラ第一積分モ $n\to\infty$ ノトキ零トナル。

7. $f(x)$ ハ点 x_0 ノ近傍デ 即チ $[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ $(\varepsilon>\delta>0)$ デ負ナラザル單調増加函数ナリトシテ、積分ノ第二ノ平均値定理ニ依リ

$$\int_0^{\delta}\left\{f(x+\tau)-f(x+0)\right\}e^{-\lambda\tau}d\tau$$

$$=\int_0^{\delta}\{f(x+\tau)-f(x+0)\}e^{-\mu\tau}\cos\nu\tau\,d\tau-i\int_0^{\delta}\{f(x+\tau)-f(x+0)\}e^{-\mu\tau}\sin\nu\tau\,d\tau$$

$$=\{f(x+\delta-0)-f(x+0)\}\left\{\int_{\delta'}^{\delta}e^{-\mu\tau}\cos\nu\tau\,d\tau-i\int_{\delta''}^{\delta}e^{-\mu\tau}\sin\nu\tau\,d\tau\right\}$$

然ルニ

$$\int_{\delta'}^{\delta}e^{-\mu\tau}\cos\nu\tau\,d\tau-i\int_{\delta''}^{\delta}e^{-\mu\tau}\sin\nu\tau\,d\tau$$

$$=\begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right) & \mu\geqq 0 \text{ ノトキ} \\ O\left(\dfrac{e^{-\mu\delta}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right) & \mu\leqq 0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

依ッテ

$$\oint_{\mathfrak{C}_n}\frac{1}{G(\lambda)}\int_0^{\delta}\{f(x_0+\tau)-f(x_0+0)\}e^{-\lambda\tau}\,d\tau\,d\lambda$$

ハ $|f(x_0+\delta-0)-f(x_0+0)|$ ノ或常数倍ヲ越エズ，従ッテ $\delta\downarrow 0$ ト共ニ、零ニ tend スル。

$f(x)$ ガ点 x_0 ノ近傍デ有界変分ナラバ，負ナラザル単調増加函数ノ差ニ直シテ、同様ノコトガ云ヘル。

依ッテCニツイテ証明スベキコトガ出来タ。

Bニツイテモ全ク同様デアル。

8. §4 以下 $b>x_0>0$ トシテデアルガ $a<x_0<0$ ノトキモ同様デ、コノ場合ニハ，豫備定理4ノ第二ノ積分ガ役立ツコト，$x_0=0$ ノトキニハ，第一，第二ノ積分ガ役

立ツコトガ容易ニワカル。

依ッテ §1 ノ定理ノ証明ガ出來タ。

更ニ進ンデ次ノ如キ結果ヲ得ル。

系： §1 ニテ假定〔II_1〕，〔II_2〕ニ代フルニ、夫々

〔假定II_1'〕 函數 $f(x)$ ガ區間〔$\xi+2a$, $\xi+2b$〕デ Lebesgue 積分可能デアル。

〔假定II_2'〕 函数ガ一点 x_0（但シ $\xi+a<x_0<\xi+b$）ニテ有界変分デアルヲ以テスレバ

点 x_0 ニ對シテ

$$S_n(x_0,\xi)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_n}\frac{1}{G(\lambda)}\left\{\int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)}\left(\int_\xi^{\xi+\eta}e^{-\lambda t}f(t)dt\right)d\varphi(\eta)\right\}d\lambda$$

$$\to\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

定理2. 系ノ〔假定II_2'〕ニ代フルニ，

〔假定II_2^*〕 $f(x)$ ガ（$\xi+a$, $\xi+b$）ニ含マレル區間〔$\xi+a'$, $\xi+b'$〕デ連続有界変分ナリトスル

ヲ以ッテスレバ，〔$\xi+a'$, $\xi+b'$〕ノ内部ニ含マレル任意ノ閉區間〔$\xi+a''$, $\xi+b''$〕ニ於ケル x ニ關シテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x,\xi)=f(x).$$

証明： コレニハ，次ノ事實ニ着目スレバヨイ。

(i) 豫備定理3 ノ A_1, B_1 ノ証明ヲ振返ッテミルトキ

A_1^*: $r\geqq a'>a$ ナルトキハ，r ニ関シテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty} S-(n,r)=0$$

B_1^*: $r \leqq b' < b$ ナルトキニハ，rニ関シテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty} S+(n,r)=0$$

トナルコト

(ii) §7ニテ、$f(x+\delta-0)-f(x+0)$ 即チ $f(x+\delta)-f(x)$ ガ〔a'', b''〕ニテ一様ニ、δト共ニ零ニ tend スルコト。（コヽニ假定II_2'ヲ使フ）

9. 定理 4. 今§1ニテ假定I_1, I_2ノ外ニ更ニ

〔假定II_2''〕 $f(x)$ハ任意ノ有限區間デ連續有界変分デアリ

〔假定III〕 $\displaystyle\int_a^b f(x+t)\,d\varphi(t)=0 \quad (-\infty<x<+\infty)$

トスレバ

〔主張〕 任意ノ有限閉區間〔p, q〕ニテ一様ニ，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,0)=f(x)$$

〔証明〕 §8ノ定理2ヲ見ルトキ，$S_n(x,\xi)$ニテコノ係数ガξニ independent ナ値ヲモツコトガ云ヘサヘスレバヨイ。 蓋シ，〔p, q〕ニ属スル任意ノ一点x_0ヲトレバ，必ズ $\xi+a<x_0<\xi+b$ ナル如キξガアル。従ッテ

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,\xi)=f(x)$$

ガ x_0 ヲ含ムアル閉區間，例ヘバ $\left[\xi+\frac{a}{2},\ \xi+\frac{b}{2}\right]$ ニテ一様ニ成立スルカラデアル。

サテ $S_n(x,\xi)$ ニテ $x^{p_n-r}e^{\lambda_n x}$ ノ係数 $a_{n,p_n-r}(\xi)$ ハ容易ニ分ル如ク

$$a_{n,p_n-r}(\xi)$$

$$=\frac{p_n!}{(p_n-r)!(r-1)!G^{(p_n)}(\lambda_n)}\int_a^b e^{\lambda_n\eta}\left\{\int_\xi^{\xi+\eta}(\xi+\eta-t)^{r-1}f_1(t)e^{-\lambda_n t}dt\right\}d\varphi(\eta)$$

但シ

$$f_1(t)=f(t)-e^{\lambda_n t}\left(a_{n,p_n-1}(\xi)t^{p_n-1}+\cdots\cdots+a_{n,p_n-r+1}t^{p_n+1-r}\right)$$

ト假ニオク。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{又}\quad G^{(s)}(\lambda_n)=0 & s=0,1,2,\cdots\cdots,p_n-1\\ \quad\ G^{(p_n)}(\lambda_n)\neq 0 & \end{array}\right\}\quad(!)$$

ソレ故ニ $\dfrac{da_{n,p_n-r}(\xi)}{d\xi}$ ノ形ガ容易ニワカリ、

コンデ〔假定III〕ト（！）トカラ

$$\frac{da_{n,p_n-r}(\xi)}{d\xi}=0$$

ナルコトヲ知ル。

10.（附記）　南雲氏ノ問題ニ関聯シテ色々ナ問題ガ派生シテ來ル。次号カラ、ソレラニ関聯シテ筆者ノ得タ二三ノ結果ヲ申シ上ゲタイト思ヒマス。

ソレカラ、尚一言。

假定I_1, I_2ハ，$G(\lambda)$ヲバ exponential sum ニ直ストコロニ用キタノデアリマシテ、他ノ假定デアッテモ $G(\lambda)$ガ exponential sum ニ直リサヘスレバ、同様ニ行クワケデアリマス、コノ事ハ何レハッキリ書クコトニ致シタイト思ヒマスが，ソノ特別ノ場合

$$G(\lambda)=\int_a^b e^{\lambda t}dt$$

トシテ Fourier 級数ヲ含ムノデスカラ．

若シ，筆者ノ得タ結果が正シケレバ，Fourier 級數論ニ於ケル古典的ナ Jordan ノ收斂條件ニ相當シテ居ルワケデス。ソコニ於イテ知ラレテキル幾多ノ收斂條件が，ドノ程度マデ吾々ノ問題ニアテハマルカ、コレニ関シテハ，諸賢ノ御教示ニ俟チタイト思ヒマス。ソノタメニ Fourier 級数論ニ於ケル Dirichlet ノ積分ニ correspond シタ積分ヲ考ヘテハ如何デセウカ？

——（續ク）——